УДК 330.115

О.А. Жуковская

Интервальные вычисления в задачах оценки экспертных решений

Рассмотрены конструктивные алгоритмы формальной оценки экспертных решений в условиях априорной неопределенности, основанные на методах интервального анализа и на переходе от неизвестных вероятностных характеристик к доверительным интервалам, определяемым по выборкам ограниченного объема.

Constructive algorithms of the formal evaluation of expert decisions in the conditions of a priori uncertainty based on the methods of interval analysis are considered. The algorithms are based on the transition from the unknown probability characteristics to confidence intervals that are determined for the samples of a limited volume.

Розглянуто конструктивні алгоритми формальної оцінки експертних рішень за умов апріорної невизначеності, засновані на методах інтервального аналізу та на переході від невідомих імовірнісних характеристик до довірчих інтервалів, які визначаться за вибірками обмеженого обсягу.

Введение. Экспертные решения, основанные на знаниях специалистов той или иной предметной области, все чаще используются в науке, технике, медицине, экономике и других областях приложений [1, 2]. Довольно часто такие решения опираются на данные, известные лишь с точности до ограничений. Иными словами, эксперт не владеет информацией о точном значении требуемой величины, но знает границы интервала, которому предположительно принадлежит эта величина.

Например, при оценке экономической ситуации эксперт часто оперирует пределами цен продукции, «коридором», в котором находится курс национальной валюты и т.п. В технических приложениях эксперту может быть не известно точное значение физической величины (из-за отсутствия датчика для ее измерения), но по косвенным признакам может быть оценен интервал значений, в котором она находится. Список подобных примеров можно было бы продолжить.

Интервальный анализ – современный математический инструмент для оперирования с данными, заданными с точностью до ограничений. Интервальный анализ – это раздел математики, предметом которого является решение задач с интервальной неопределенностью и неоднозначностью в данных, возникающих при постановке задачи или на промежуточных стадиях процесса решения [3]. Характерной особенностью интервального анализа является рассмотрение множеств неопределенности как самостоятельных цельных объектов путем установления арифметических, аналитических и других операций и отношений между ними.

В то же время традиционные методы выполнения арифметических операций с интервальными величинами, в частности выражение для операции умножения, неудобны и не всегда пригодны для аналитического решения задачи.

В работе [4] получены выражения для вычисления произведения интервальных величин, заданных в форме центр–радиус.

Цель данной статьи – продемонстрировать удобство предложенных выражений для решения актуальных прикладных задач, в том числе принятия коллективных решений группой независимых экспертов, оценки квалификации эксперта и определения емкости рынка в условиях априорной неопределенности.

Интервальные арифметические операции

Дадим краткую информацию о предложенном методе умножения интервальных величин в форме центр–радиус.

Согласно [5], интервалом называется множество действительных чисел $A = \{\xi\}$, удовлетворяющих условию

$$\underline{a} \le \xi \le \overline{a}\ ,\ \forall \underline{a}, \overline{a} \in R\,,$$

где $\underline{a}$ и $\overline{a}$ – соответственно нижняя и верхняя граница интервала $A = [\underline{a}, \overline{a}]$.

Множество всех замкнутых действительных интервалов обозначается как $I(R)$.

Над двумя интервалами $A, B \in I(R)$ могут выполняться четыре арифметические операции, определяемые как операции над элементами соответствующих множеств:

$$A+B=\{\xi+\eta \mid \xi\in A,\eta\in B\};$$
$$A-B=\{\xi-\eta \mid \xi\in A,\eta\in B\};$$
$$A\cdot B=\{\xi\cdot\eta \mid \xi\in A,\eta\in B\};$$
$$A/B=\{\xi/\eta \mid \xi\in A,\eta\in B\}.$$

В явном виде результат выполнения операций суммирования, вычитания, умножения и деления может быть получен по формулам [5]:

$$A+B=[\underline{a}+\underline{b},\overline{a}+\overline{b}], \quad (1)$$

$$A-B=[\underline{a}-\overline{b},\overline{a}-\underline{b}], \quad (2)$$

$$A\cdot B=[\min\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}\}], \quad (3)$$

$$A/B=A\cdot[1/\overline{b},1/\underline{b}]. \quad (4)$$

Из выражения (3) следует, что если числа $\underline{a}$, $\overline{a}$, $\underline{b}$, $\overline{b}$ *одного* знака, то вычисление произведения $A\cdot B$ не вызывает трудностей. Например, если $\underline{a}>0$ и $\underline{b}>0$, то

$$A\cdot B=[\underline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}],$$

а если $\overline{a}<0$ и $\overline{b}<0$, то

$$A\cdot B=[\overline{a}\overline{b},\underline{a}\underline{b}].$$

В общем же случае, когда границы $\underline{a}$, $\overline{a}$, $\underline{b}$, $\overline{b}$ интервалов разного знака, вычисление произведения $A\cdot B$ усложняется: необходимо определить, какая из величин $\underline{a}\underline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}$ будет иметь наибольшее, а какая наименьшее значение.

Известна также вторая форма представления интервалов:

$$A=\langle a,r_a\rangle,\ B=\langle b,r_b\rangle, \quad (5)$$

где

$$a=\frac{\underline{a}+\overline{a}}{2};\ r_a=\frac{\overline{a}-\underline{a}}{2}; \quad b=\frac{\underline{b}+\overline{b}}{2};\ r_b=\frac{\overline{b}-\underline{b}}{2}, \quad (6)$$

– центры и радиусы соответствующих интервалов.

В работе [6] предложены выражения для арифметических операций над интервалами в форме центр–радиус, имеющие вид:

$$\langle a,r_a\rangle+\langle b,r_b\rangle=\langle a+b,r_a+r_b\rangle, \quad (7)$$

$$\langle a,r_a\rangle-\langle b,r_b\rangle=\langle a-b,r_a+r_b\rangle, \quad (8)$$

$$\langle a,r_a\rangle\langle b,r_b\rangle=\langle ab+r_ar_b,br_a+ar_b\rangle, \quad a\ge r_a\ge 0,\ b\ge r_b\ge 0, \quad (9)$$

$$\frac{\langle a,r_a\rangle}{\langle b,r_b\rangle}=\left\langle \frac{ab+r_ar_b}{b^2-r_b^2},\frac{br_a+ar_b}{b^2-r_b^2}\right\rangle, \quad a\ge r_a\ge 0,\ b\ge r_b\ge 0. \quad (10)$$

Легко убедиться в том, что результат выполнения операций в соответствии с выражениями (7), (8) эквивалентен результатам вычисления по формулам (1), (2).

В то же время можно показать, что выражения (9), (10) дают корректный результат только для положительно определенных интервалов.

Для умножения двух интервалов с произвольными значениями $a,r_a,\ b,r_b$ в работе [5] предложено другое выражение:

$$\langle a,r_a\rangle\langle b,r_b\rangle=\langle ab,br_a+ar_b+r_ar_b\rangle. \quad (11)$$

Однако можно показать, что формулы (11) и (3) не эквивалентны и дают различный результат, причем при увеличении радиусов выражение (11) дает существенно более широкий интервал, чем точное выражение (3).

В работе [4] подробно исследован эффект неэквивалентности выражений (11) и (3) и на основании этого анализа предложена классификация интервалов в форме центр–радиус, позволившая получить формулу для вычисления в явном виде произведения интервалов при любых значениях $a,r_a,\ b,r_b$.

Остановимся на деталях этого метода, используемых в дальнейших исследованиях.

Представим множество $I(\mathrm{R})=\{\langle a,r_a\rangle \mid a,\ r_a\in\mathrm{R},\ r_a>0\}$ всех действительных интервалов в форме центр–радиус как объединение непересекающихся подмножеств (рис. 1)

$$I(\mathrm{R})=I_1(\mathrm{R})\cup I_2(\mathrm{R})\cup I_3(\mathrm{R}), \quad I_i(\mathrm{R})\cap I_j(\mathrm{R})=\varnothing,\quad i,j=1,2,3,\quad i\ne j, \quad (12)$$

где

$$I_1=\{\langle a,r_a\rangle,\langle b,r_b\rangle \mid \frac{|a|}{r_a}\ge 1,\frac{|b|}{r_b}\ge 1,\ r_a,r_b>0,\ a,r_a,b,r_b\in\mathrm{R}\},$$

$$I_2=\{\langle a,r_a\rangle,\langle b,r_b\rangle \mid \frac{|a|}{r_a}<1,\frac{|a|}{r_a}<\frac{|b|}{r_b},$$

$$r_a, r_b > 0, \ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

$$I_3 = \{\langle a, r_a\rangle, \langle b, r_b\rangle \mid \ \frac{|b|}{r_b} < 1, \frac{|a|}{r_a} \ge \frac{|b|}{r_b},$$

$$r_a, r_b > 0, \ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\}.$$

Доказано [4], что в каждой из указанных областей результат вычисления произведения интервалов может быть выражен через элементарные функции:

$$AB = \begin{cases} \langle ab + \mathrm{sgn}(ab) r_a r_b, \ |a| r_b + |b| r_a \rangle, \ \ A, B \in I_1, \\ \langle ab + \mathrm{sgn}(b) a\, r_b, \ |b| r_a + r_a r_b \rangle, \ \ A, B \in I_2, \\ \langle ab + \mathrm{sgn}(a) b r_a, \ |a| r_b + r_a r_b \rangle, \ \ A, B \in I_3. \end{cases} \quad (13)$$

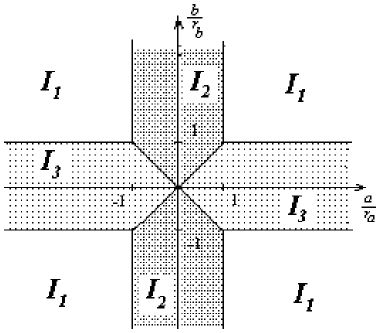

Рис. 1. Классификация действительных интервалов

Таким образом для вычисления произведения двух интервалов необходимо вначале по значениям a/r_a и b/r_b провести классификацию сомножителей $A = \langle a, r_a\rangle$ и $B = \langle b, r_b\rangle$ и на основе этой классификации вычислить произведения по соответствующему выражению в формуле (13).

Взаимосвязь интервального анализа с теорией вероятности

Интервальный анализ, объектами которого являются интервальные величины, главным образом используется в задачах с нестатистически заданной неопределенностью [7–9]. Поэтому этот метод как научная дисциплина долгие годы развивался независимо от теории вероятности и математической статистики.

В последние годы некоторые исследователи проложили «мостик» между этими математическими дисциплинами. Например, быстро развиваются методы прикладной математической статистики в задачах, когда статистические данные – не числа, а интервалы. Такие методы, получившие название математическая статистика интервальных данных, оказываются перспективными в исследовании результатов наблюдений с наложением ошибок [10].

Заметим, что одним из недостатков интервального анализа, который часто подвергается справедливой критике, есть отсутствие обоснованных соображений о том, как определяются границы рассматриваемых интервалов. Чаще всего этот вопрос остается за «кадром» исследований, и при решении прикладных задач границы интервалов считаются априори заданными.

В то же время при решении ряда прикладных задач можно указать границы интервалов рассматриваемых величин, опираясь на теорию вероятности, а потом уже применять операции над интервальными величинами.

Предположим, что в математической модели, на основе которой формулируется некоторая задача, фигурирует *вероятность р* некоторого случайного события *E*. Чаще всего величина *p* может быть рассмотрена лишь как математическая абстракция, неизвестная при решении прикладной задачи. Поэтому на практике приходится оперировать с ее оценкой (частотой события)

$$p^* = \frac{n_E}{n}, \quad (14)$$

где n_E – число испытаний, благоприятных событию *E* в выборке из *n* наблюдений.

Очевидно, что замена неизвестной вероятности p ее оценкой p^* правомерна лишь при достаточно большом объеме n наблюдений. В то же время из теории вероятностей известно [11], что для любого значения частоты p^* можно построить *доверительный интервал*, которому с доверительной вероятностью β принадлежит неизвестное значение *p*.

Этот интервал можно записать в форме центр–радиус

$$I = \langle p^c, r\rangle, \quad (15)$$

где

$$p^c = \frac{p^* + t_\beta^2 / 2n}{1 + t_\beta^2 / n}, \quad (16)$$

$$r = \frac{t_\beta \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n} + \frac{t_\beta^2}{4n^2}}}{1 + t_\beta^2/n} \ . \qquad (17)$$

Здесь $t_\beta = \arg \Phi^* \left(\frac{1+\beta}{2} \right) > 0$, где $\Phi^*(x) = = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau$ – нормальная функция распределения.

Покажем на примерах решения ряда прикладных задач методологию практического использования рассмотренных соотношений.

Задача коллективных решений

Для повышения эффективности принимаемых решений часто используется информация, полученная от группы экспертов [12, 13]. Типичный пример такой задачи – медицинский консилиум, принимающий окончательное решение на основании учета частных решений отдельных специалистов.

Формально такая задача может быть сведена к байесовской постановке [14]. Рассмотрим эту задачу в простейшем случае, когда два независимых эксперта (врача) A_1, A_2 проводят диагностику некоторого заболевания у пациента, относя текущее состояние пациента к одному из $M = 2$ классов (диагнозов) – V_1 (заболевание выявлено) и V_2 (заболевание не выявлено).

Будем записывать частные решения экспертов в виде индикаторной переменной

$$\delta_i = k, \text{ если } A_i \text{ решает в пользу } V_k,\ i = 1,2,\ k = 1,2 . \qquad (18)$$

Понятно, что множество S возможных ситуаций состоит из четырех комбинаций частных решений (1), причем только в двух случаях эти решения согласованы (когда эксперты принимают одинаковые решения), а в двух остальных – решения противоречивы:

$$\begin{aligned} S_{12} &: (\delta_1 = 1) \wedge (\delta_2 = 2); \\ S_{21} &: (\delta_1 = 2) \wedge (\delta_2 = 1). \end{aligned} \qquad (19)$$

Согласно [14], в условиях противоречий (19) оптимальное коллективное решение $D = (\delta_1, \delta_2)$, минимизирующее среднюю вероятность ошибки на множестве S, должно приниматься по схеме:

- в конфликтной ситуации S_{12} принимать решение в пользу V_1, если

$$P_{A_2}(1 - P_{A_1}) > \lambda P_{A_1}(1 - P_{A_2}) , \qquad (20)$$

и решение в пользу V_2, если

$$P_{A_2}(1 - P_{A_1}) < \lambda P_{A_1}(1 - P_{A_2}) ; \qquad (21)$$

- в конфликтной ситуации S_{21} принимать решение в пользу V_1 если

$$P_{A_1}(1 - P_{A_2}) > \lambda P_{A_2}(1 - P_{A_1}) , \qquad (22)$$

и решение в пользу V_2, если

$$P_{A_1}(1 - P_{A_2}) < \lambda P_{A_2}(1 - P_{A_1}) , \qquad (23)$$

где

$$\lambda = \frac{1 - P(V_1)}{P(V_1)} ,$$

$P(V_1)$ – априорная вероятность класса V_1 (преваленс заболевания), а P_{A_1}, P_{A_2} – вероятности ошибок частных решений экспертов.

Будем оценивать неизвестные вероятности P_{A_1}, P_{A_2}, фигурирующие в (20)–(23), частотами событий, наблюдаемых в выборке из n наблюдений с известными состояниями пациента

$$P^*_{A_i} = \frac{E_{A_i}}{n} ,\ i = 1,2 , \qquad (24)$$

где E_{A_i} – число случаев, когда i-й эксперт принял неверное решение.

При известных $P^*_{A_i}$ и n по формуле (17) могут быть определены доверительные интервалы $I_{A_1} = \langle P^c_{A_1}, r_{A_1} \rangle$, $I_{A_2} = \langle P^c_{A_2}, r_{A_2} \rangle$, которым с заданной доверительной вероятностью β принадлежат неизвестные вероятности P_{A_1}, P_{A_2}.

Применяя арифметические операции (7), (8), (13) над интервалами в форме центр–радиус, переходим к интервальному обобщению схемы (20)–(23), в соответствии с которым можно утверждать [15], что с вероятностью β коллективное решение $D = D(\delta_1, \delta_2)$ обеспечит минимум средней вероятности ошибки на множестве S, если

• в конфликтной ситуации S_{12} принимать решение в пользу V_1, когда выполняется условие

$$(P^c_{A_2} - r_{A_2})(1 - P^c_{A_1} - r_{A_1}) > \\ > \lambda(P^c_{A_1} + r_{A_1})(1 - P^c_{A_2} + r_{A_2}), \qquad (25)$$

и решение в пользу V_2, когда выполняется условие

$$(P^c_{A_2} + r_{A_2})(1 - P^c_{A_1} + r_{A_1}) < \\ < \lambda(P^c_{A_1} - r_{A_1})(1 - P^c_{A_2} - r_{A_2}); \qquad (26)$$

• в конфликтной ситуации S_{21} принимать решение в пользу V_1, когда выполняется условие

$$(P^c_{A_1} - r_{A_1})(1 - P^c_{A_2} - r_{A_2}) > \\ > \lambda(P^c_{A_2} + r_{A_2})(1 - P^c_{A_1} + r_{A_1}), \qquad (27)$$

и решение в пользу V_2, когда выполняется условие

$$(P^c_{A_1} + r_{A_1})(1 - P^c_{A_2} + r_{A_2}) < \\ < \lambda(P^c_{A_2} - r_{A_2})(1 - P^c_{A_1} - r_{A_1}). \qquad (28)$$

Очевидно, что ситуация противоречия частных решений экспертов остается неразрешенной, если интервалы, на основе которых построены соотношения (25)–(28) пересекаются, а значит не будет выполняться ни одно из этих неравенств.

На рис. 2 представлены примеры областей коллективного решения, построенные для разрешения противоречивой ситуации S_{12} согласно условиям (25), (26). Темным цветом выделены области значений частот $P^*_{A_i}$, при которых конфликтная ситуация не может быть разрешена из-за пересечения соответствующих доверительных интервалов.

В то же время из выражений (16), (17) следует, что с ростом числа n доверительные интервалы сужаются. Это позволяет доказать [15], что для любых $P(V_1)$ и β существует такое число наблюдений $n_0 > 0$, что после оценки частот ошибок $P^*_{A_i}$ по репрезентативной выборке объемом $n > n_0$ модель коллективных решений обеспечит однозначное разрешение противоречий (19) на основе условий (25)–(28).

При этом показано [16], что необходимое число экспериментов n_0, при котором можно

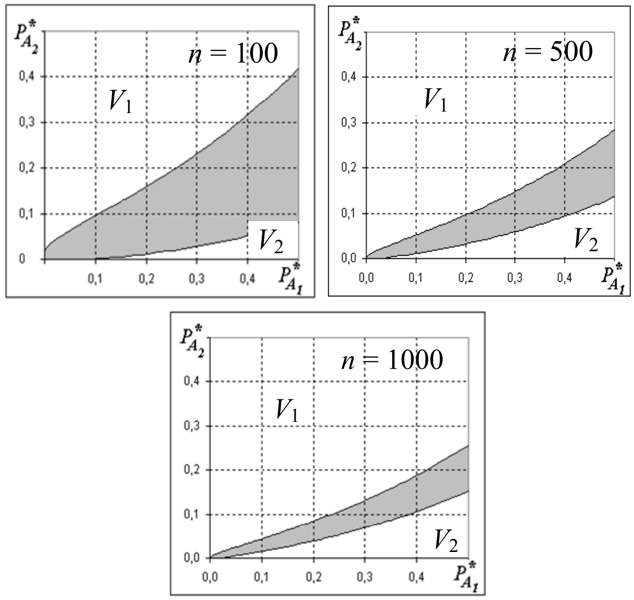

Рис. 2. Области коллективного решения в конфликтной ситуации S_{12} при $P(V_1) = 0{,}8$, $\beta = 0{,}99$

принимать однозначное коллективное решение, определяется соотношением

$$n_0 = \left[t^2_\beta \frac{\sqrt{\lambda}(P^*_{A_2} + \sqrt{\lambda}P^*_{A_1})(\sqrt{\lambda}(1 - P^*_{A_2}) + (1 - P^*_{A_1}))}{(P^*_{A_2}(1 - P^*_{A_1}) - \lambda P^*_{A_1}(1 - P^*_{A_2}))^2} + 1 \right], \qquad (29)$$

где $[\eta]$ – целая часть числа η.

Для иллюстрации на рис. 3 представлена укрупненная блок-схема алгоритма, реализующего предложенную модель коллективных решений.

Задача сравнения квалификаций экспертов

Развитие компьютерных методов оценки экспертных решений настоятельно требует формализации представлений о квалификации экспертов. Следуя [17], будем оценивать квалификацию эксперта средним риском R его индивидуальных решений, под которым понимается математическое ожидание потерь

$$R = \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} L_{jk} P(V_k, \delta = j), \qquad (30)$$

где L_{11} и L_{22} – потери, связанные с правильными решениями, L_{12} и L_{21} – потери, связанные с ошибками первого и второго рода, а величина $P(V_k, \delta = j)$ обозначает вероятность совместного выполнения двух случайных событий: объект находится в состоянии V_k ($k = 1, 2$), а эксперт принял решение $\delta = j$ в пользу j-го состояния V_j ($j = 1, 2$).

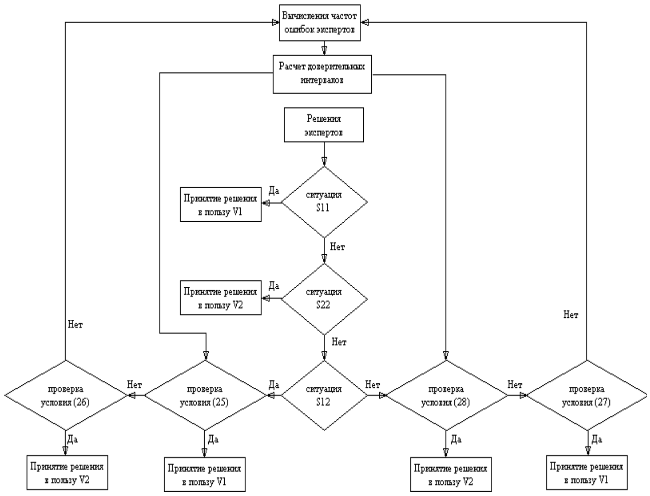

Рис. 3. Блок-схема алгоритма принятия коллективных решений

В этом случае разумно полагать, что эксперт A_1 более квалифицирован, чем эксперт A_2, если средний риск R_1, основанный на решениях A_1, меньше среднего риска R_2, основанного на решениях A_2, т.е. выполняется строгое неравенство

$$R_1 < R_2 . \qquad (31)$$

Будем, как и раньше оценивать по репрезентативной выборке наблюдений с известными состояниями объекта частоты ошибок эксперта

$$P^*_{jk} = \frac{E_j}{n_k},\ k, j = 1, 2 , \qquad (32)$$

где n_k, E_j – соответственно число случаев, когда объект заведомо находился в состоянии V_k, а эксперт принял неверное решение ($j \neq k$).

При известных P^*_{jk}, по формулам (16), (17), можно определить доверительные интервалы $P^{(i)}_{12} \in \left\langle P^{c\,(i)}_{12}, r^{(i)}_{12} \right\rangle$ и $P^{(i)}_{21} \in \left\langle P^{c\,(i)}_{21}, r^{(i)}_{21} \right\rangle$, которым с доверительной вероятностью β принадлежат условные вероятности ошибок экспертов. Это позволяет перейти от строгого неравенства (31) к его интервальному аналогу и доказать [17], что с доверительной вероятностью β эксперт A_1 более квалифицирован, чем эксперт A_2, если

$$\begin{gathered}\theta(P^{c\,(1)}_{21} + r^{(1)}_{21} - P^{c\,(2)}_{21} + r^{(2)}_{21}) < \\ < P^{c\,(2)}_{12} - r^{(2)}_{12} - P^{c\,(1)}_{12} - r^{(1)}_{12},\end{gathered} \qquad (33)$$

и менее квалифицирован, чем эксперт A_2, если

$$\begin{gathered}\theta(P^{c\,(1)}_{21} - r^{(1)}_{21} - P^{c\,(2)}_{21} - r^{(2)}_{21}) > \\ > P^{c\,(2)}_{12} + r^{(2)}_{12} - P^{c\,(1)}_{12} + r^{(1)}_{12},\end{gathered} \qquad (34)$$

где $P^{c\,(i)}_{12}, P^{c\,(i)}_{21}$ и $r^{(i)}_{12}, r^{(i)}_{21}$ – центры и радиусы соответствующих доверительных интервалов, а

$$\theta = \frac{P(V_1)(L_{21} - L_{11})}{[1 - P(V_1)](L_{12} - L_{22})} . \qquad (35)$$

Нетрудно показать, что для любых θ и β существует такое число n_0, что после оценки частот (32) по репрезентативной выборке объемом $n > n_0$ выполняется либо строгое неравенство (33), либо строгое неравенство (34), а значит, можно однозначно определить, какой из экспертов более квалифицирован.

Для иллюстрации на рис. 4 приведены графики функций, представляющие собой зависимости от числа наблюдений n левой (кривая 1) и правой (кривая 2) частей неравенства (33), а также левой (кривая 3) и правой (кривая 4) частей неравенства (34). Указанные зависимости построены для значения доверительной вероятности $\beta = 0{,}99$ при частотах ошибок экспертов $P^{*(1)}_{12} = 0{,}01$, $P^{*(2)}_{12} = 0{,}07$, $P^{*(1)}_{21} = 0{,}04$, $P^{*(2)}_{21} = 0{,}02$, априорной вероятности $P(V_1) = 0{,}1$ и значениях потерь $L_{11} = L_{22} = 0$, $L_{21} = 2$, $L_{12} = 1$, когда $\theta \approx 0{,}22$.

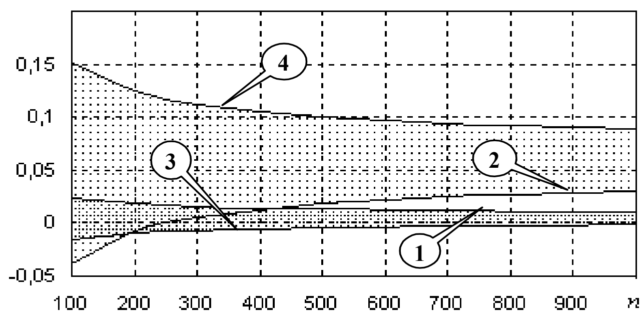

Рис. 4. Сужение доверительных интервалов, фигурирующих в соотношениях (33), (34) при увеличении числа наблюдений n

Легко видеть, что в рассматриваемом случае сравнение квалификаций экспертов становится возможным, когда частоты ошибок экспертов оценены более чем по 430 наблюдениям.

Задача экспертной оценки емкости рынка

Эффективность управленческих решений в значительной степени зависит от правильности оценки ситуации на рынке. Для такой оценки обычно рынок делится на m сегментов, в каждом из которых есть потенциальные потребители данного товара. Учитывая то, что поведение покупателей в пределах каждого сегмента может значительно различаться, оценивать их надо отдельно.

В работе [18] рассмотрена вероятностная модель оценки емкости рынка

$$C = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} S_i P_{ij} L_j \,, \qquad (36)$$

где C – ориентированная полная ёмкость рынка для всей группы товаров; L_j – количество предприятий в j-м сегменте, потребляющих i-й товар; S_i – стоимость i-го товара; P_{ij} – вероятность того, что i-й товар будет пользоваться спросом на рынке в j-м сегменте, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1$.

При неизвестных P_{ij} на основе такой модели может быть разработан конструктивный алгоритм, если в (36) перейти от точечной вероятности P_{ij} к ее доверительному интервалу [19]. Для этого сначала в каждом j-м сегменте рынка случайным образом выделим некоторую часть потенциальных потребителей, среди которых проведем экспертный опрос об их согласии приобрести i-й товар. В результате может быть оценена частота покупки i-го товара в j-м сегменте по формуле

$$P_{ij}^{*} = \frac{Q_{ij}}{b_j},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}, \qquad (37)$$

где b_j – общее количество опрошенных предприятий в j-м сегменте рынка, а Q_{ij} – количество опрошенных предприятий в j-м сегменте рынка, согласных покупать i-й товар.

Это дает возможность перейти от точечной модели (36) к ее интервальному аналогу

$$C = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} S_i \mathrm{I}_{ij} L_j \,, \qquad (38)$$

где $S_i = \left\langle S_i^c, r_i^S \right\rangle$ – интервал, к которому принадлежит стоимость S_i некоторого i-го товара; L_j – количество потенциальных покупателей i-го товара в j-м сегменте; $\mathrm{I}_{ij} = \left\langle P_{ij}^c, r_{ij} \right\rangle$ – доверительный интервал, к которому с вероятностью β принадлежит вероятность P_{ij} приобретения i-го товара в j-м сегменте.

Применяя операцию умножения интервалов $S_i = \left\langle S_i^c, r_i^S \right\rangle$ и $\mathrm{I}_{ij} = \left\langle P_{ij}^c, r_{ij} \right\rangle$, перейдем от выражения (38) к его эквивалентной форме

$$\mathbf{C} = \langle C^c, r^C \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left\langle S_i^c P_{ij}^c + r_{ij} r_i^S, S_i^c r_{ij} + P_{ij}^c r_i^S \right\rangle L_j . \quad (39)$$

Эффективная стратегия предприятия может быть основана на сравнении емкостей рынков для нескольких товаров. Рассмотрим этот практически важный случай, используя интервальную модель (39).

Пусть в некотором сегменте рынка имеется L_{11} потенциальных покупателей 1-го товара и L_{21} потенциальных покупателей 2-го товара. Предположим, что для исследования емкости рынка 1-го товара методом Монте-Карло выбрано b_1 предприятий, в результате опроса которых выяснено, что этот товар приобретут Q_1 предприятий. Согласно (37) определяем частоту приобретения 1-го товара $P_{11}^{*} = \frac{Q_1}{b_1}$.

Аналогично определяется частота приобретения 2-го товара $P_{21}^{*} = \frac{Q_2}{b_2}$.

По формуле (17) при известных P_{11}^{*} и P_{21}^{*} определяем центры P_{11}^c, P_{21}^c и радиусы r_{11}, r_{21} доверительных интервалов $\mathrm{I}_{11} = \left\langle P_{11}^c, r_{11} \right\rangle$, $\mathrm{I}_{21} = \left\langle P_{21}^c, r_{21} \right\rangle$, которым с заданной доверительной вероятностью β принадлежат вероятности P_{11} и P_{21}.

В соответствии с выражением (39) по такой информации определим интервалы емкостей рынка для 1-го и 2-го товара

$$\mathbf{C}_{11} = \langle C_{11}^c, r_{11}^C \rangle = \\ = \langle S_1^c P_{11}^c + r_{11} r_1^S, P_{11}^c r_1^S + S_1^c r_{11} \rangle\ L_{11}\,, \qquad (40)$$

$$\mathbf{C}_{21} = \langle C_{21}^c, r_{21}^C \rangle = \\ = \langle S_2^c P_{21}^c + r_{21} r_2^S, P_{21}^c r_2^S + S_2^c r_{21} \rangle\ L_{21}\,. \qquad (41)$$

На основе сравнения интервалов (40), (41) могут быть приняты экспертные решения о дальнейшей стратегии предприятия. В самом деле, любое точечное значение $C_{11} \in \mathbf{C}_{11}$ будет меньше (или больше) любого точечного значения $C_{21} \in \mathbf{C}_{21}$, если интервалы $\mathbf{C}_{11} = \langle C_{11}^c, r_{11}^C \rangle$, $\mathbf{C}_{21} = \langle C_{21}^c, r_{21}^C \rangle$ не пересекаются, т.е. выполняется одно из условий

$$C_{11}^c - r_{11}^C > C_{21}^c + r_{21}^C, \qquad (42)$$
$$C_{11}^c + r_{11}^C < C_{21}^c - r_{21}^C, \qquad (43)$$

которые, с учетом (40), (41), можно представить

$$(S_1^c P_{11}^c + r_{11} r_1^S - P_{11}^c r_1^S - S_1^c r_{11})\ L_{11} >$$
$$> (S_2^c P_{21}^c + r_{21} r_2^S + P_{21}^c r_2^S + S_2^c r_{21})\ L_{21}, \qquad (44)$$
$$(S_1^c P_{11}^c + r_{11} r_1^S + P_{11}^c r_1^S + S_1^c r_{11})\ L_{11} <$$
$$< (S_2^c P_{21}^c + r_{21} r_2^S - P_{21}^c r_2^S - S_2^c r_{21})\ L_{21}. \qquad (45)$$

Если же интервалы $\mathbf{C}_{11}$, $\mathbf{C}_{21}$ пересекаются, то ни одно из условий (44), (45) не выполняется. Понятно, что в этом случае принять эффективную стратегию предприятия невозможно.

Вместе с тем, на основании уже упоминавшихся свойств доверительных интервалов в работе [20] показано, что для любой доверительной вероятности β за счет увеличения общего количества b_j опрошенных предприятий в j-м сегменте рынка всегда можно добиться того, чтобы интервалы $\mathbf{C}_{11}$, $\mathbf{C}_{21}$ не пересекались, а значит обеспечить однозначную оценку экспертных решений о стратегии предприятия на основе проверки условий (44), (45).

Заключение. Таким образом, в статье показано, что на основе арифметических операций над интервальными величинами в форме центр–радиус могут быть разработаны конструктивные алгоритмы, ориентированные на решения актуальных прикладных задач оценки экспертных решений в условиях априорной неопределенности. Этот подход продемонстрирован на примерах задач построения коллективных решений в условиях противоречий, оценки квалификации эксперта и емкости рынка. Аналогичный подход к оценке экспертных решений может быть применен и для решения других прикладных задач, в частности, для оценки экономического эффекта от инновационного внедрения [21], а также для принятия решения малым предприятием о сроках погашения и размере необходимого кредита при интервально заданных объемах реализации и ценах продукции [22].

1. *Выявление* экспертных знаний / О.И. Ларичев, А.И. Мечитов, Е.М. Мошкович и др. – М.: Наука, 1989. – 128 с.
2. *Макаров И.М.* Теория выбора и принятия решений. – М.: Наука, 1987. – 350 с.
3. *Шарый С.П.* Конечномерный интервальный анализ. – *http://www.nsc.ru/interval*
4. *Жуковська О.А.*, *Новицький В.В.* Прямий метод обчислення добутку інтервалів у формі центр–радіус // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2003. – № 1. – С. 138–144.
5. *Алефельд Г.*, *Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987. – 360 с.
6. *Sunaga T.* Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis // RAAG Memoirs. – 1958. – № 2. – P. 547–564.
7. *Moens D.*, *Vandepitte D.* A survey of non-probabilistic uncertainty treatment in finite element analysis // Computer Method in Applied Mechanics and Engineering. – 2005. – **194**. – Issue 12–16. – P. 1527–1555.
8. *Some* observations on uncertainty propagation through a simple nonlinear system / K. Worden, G. Manson, T.M. Lord et al. // J. of Sound and Vibration. – 2005. – **288**. – Issue 3. – P. 601–621.
9. *Кунцевич В.М.*, *Лычак М.М.* Управление в условиях неопределенности (синтез адаптивных систем управления) // Автоматика. – 1987. – № 5. – С. 16–26.
10. *Орлов А.И.* Нечисловая статистика. – М.: МЗ-Пресс, 2004. – 513 с.
11. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
12. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974. – 256 с.
13. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991. – 464 с.
14. *Файнзильберг Л.С.* Байесова схема принятия коллективных решений в условиях противоречий // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 3. – С. 112–122.
15. *Жуковская О.А.*, *Файнзильберг Л.С.* Интервальное обобщение байесовской модели принятия коллективного решения в конфликтных ситуациях // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 3. – С. 133–144.
16. *Жуковська О.А.* Основи інтервального аналізу: Навч. посіб. – К.: Освіта України, 2009. – 136 с.
17. *Жуковская О.А.*, *Файнзильберг Л.С.* Формальная оценка квалификации эксперта на основе байесовской модели и методов интервального анализа // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 3. – С. 103–115.
18. *Гилберт А. Черчилль.* Маркетинговые исследования. – СПб.: Питер, 2000. – 732 с.
19. *Жуковская О.А.* Формальная модель оценки емкости рынка в условиях интервальной неопределенности // УСиМ. – 2008. – № 5 – С. 88–92.
20. *Жуковська О.А.*, *Купка О.О.* Інтервальна модель оцінки ємності ринку // Наук. вісті НТУУ «КПІ». – 2007. – № 5. – С. 10–15.
21. *Жуковська О.А.*, *Трубнікова О.І.* Моделювання інноваційних процесів бізнес-технологій в умовах інтервальної невизначеності // Інвестиції: практика та досвід. – 2010. – № 5. – С. 14–17.
22. *Жуковська О.А.*, *Ковальова В.В.* Інтервальна модель прийняття кредитного рішення малим підприємством в умовах нестабільності цін // Економіка і держава. – 2011. – № 5. – С. 71–73.

Поступила 13.12.2011
Тел. для справок: (044) 411-6904 (Киев)