

А.А. Брус, Е.В. Дикусар, В.С. Ситников, Т.П. Яценко

Частотный анализ устройства, реализующего алгоритм экспоненциального сглаживания

Рассмотрен частотный анализ устройства, реализующего алгоритм экспоненциального сглаживания, определена зависимость частоты среза от параметра сглаживания и найден его верхний предел, предложены варианты реализации этой зависимости при использовании микропроцессорной техники.

The frequency analysis of the device, realizing the algorithm of the exponential smoothing is considered, the dependency of cut-off frequency defined onto the smoothing out parameter, the smoothing out parameter top limit is defined, that dependency realization variants where applied to microprocessor-based technique are suggested offered.

Розглянуто частотний аналіз пристрою, що реалізує алгоритм експоненціального згладжування, визначено залежність частоти зрізу від параметра згладжування, знайдено верхню межу параметра згладжування, запропоновано варіанти реалізації цієї залежності при використанні мікропроцесорної техніки.

Введение. При проектировании современных систем управления возникает задача управления при наличии помех во входном сигнале. Присутствие на входе системы не только полезного сигнала, но и широкополосной помехи, свойства которой могут изменяться, приводит к необходимости введения дополнительных устройств подавления помехи. Воздействие широкополосной помехи снижает эффективность фильтрации и обуславливает использование методов оценивания зашумленного сигнала [1–3].

Постановка задачи

Пусть на вход системы управления поступает конечная последовательность дискретных значений $x[i]$, $i = \overline{1, L}$, представляющая собой аддитивную смесь полезного сигнала $y[i]$ и помехи $\varepsilon[i]$:

$$x[i] = y[i] + \varepsilon[i].$$

Помеха $\varepsilon[i]$ имеет случайную природу с неизвестным законом распределения на интервале $[-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$ от нуля до частоты Найквиста. При этом случайная помеха $\varepsilon[i]$ имеет нулевое среднее значение $M\{\varepsilon\} = 0$ и ее значения некоррелированы $M\{\varepsilon[i], \varepsilon[j]\} = 0$, $i \neq j$, где $M\{\cdot\}$ – знак математического ожидания [1, 2].

В этих условиях, когда действует широкополосная помеха $\varepsilon[i]$, перекрывающая спектр полезного сигнала $y[i]$, применение фильтрации малоэффективно. Однако сглаживание позволяет оценить значения неизвестного зашумленного сигнала. В системах идентификации и

управления часто используют метод экспоненциального сглаживания [1, 2]. Это прежде всего связано с его простотой описания и вычисления значений, легкостью и гибкостью управления его свойствами.

Алгоритм экспоненциального сглаживания описывается разностным уравнением вида

$$\hat{y}[n] = (1 - \alpha) \hat{y}[n - 1] + \alpha x[n], \quad (1)$$

где $\hat{y}[n]$ – оценка значений полезного сигнала $y[n]$; $x[n]$ – значения входной последовательности; α – параметр сглаживания, $0 < \alpha < 1$.

Метод экспоненциального сглаживания – обобщение метода скользящего среднего. Если в методе скользящего среднего

$$\hat{y}[n] = \hat{y}[n - 1] + \frac{1}{N} (x[n] - x[n - N])$$

используется функция сглаживания с симметричным ядром, где N – ширина окна сглаживания, то в методе экспоненциального сглаживания (1) используется функция с несимметричным ядром. Преобразовав уравнение (1) к виду

$$\hat{y}[n] = \alpha \sum_{i=0}^{N-1} (1 - \alpha)^{N-i} x[i] \quad (2)$$

и приняв $\alpha = \frac{1}{M}$, где $M \leq N$, в этом случае

$1 - \alpha = \frac{M - 1}{M}$, уравнение (2) можно записать в виде

$$\hat{y}[n] = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{M - 1}{M} \right)^{N-i} x[i]. \quad (3)$$

Проанализировав (2) и (3) в соответствии с методикой, предложенной в [4], можно показать, что при формировании оценки $\hat{y}[n]$ большие значения веса $(1-\alpha)^{N-i}$ придаются более поздним отсчетам, т.е. более старым данным придаются экспоненциально убывающие значения веса. При этом значения коэффициентов $(1-\alpha)^{N-i}$ стремятся к значениям экспоненты $e^{-\alpha(N-i)}$, особенно при больших значениях N (рис. 1).

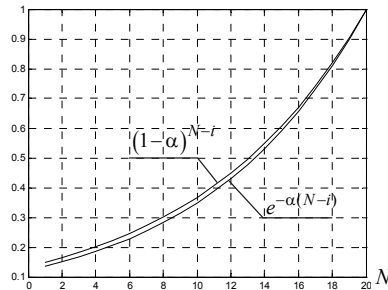


Рис. 1. График зависимости значений весов при $x[i]$

Следует отметить, что при экспоненциальном сглаживании учитываются все поступившие отсчеты, а не отсчеты, попавшие в окно сглаживания N в методе скользящего среднего, т.е. экспоненциальный метод дает не среднее значение зашумленного входного сигнала $x[i]$, а отображает тенденцию изменения полезного сигнала $y[i]$.

Дисперсия выходного сигнала σ_y^2 при использовании метода экспоненциального сглаживания будет смещена на величину $[1-(1-\alpha)^{2N}]$, т.е. $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \frac{\alpha}{1+(1-\alpha)} [1-(1-\alpha)^{2N}]$, где σ_x^2 — дисперсия входных отсчетов.

Однако при больших значениях N она стремится к $\sigma_y^2 \rightarrow \sigma_x^2 \frac{\alpha}{1+(1-\alpha)}$, тогда как в методе скользящего среднего дисперсия стремится к $\sigma_y^2 \rightarrow \sigma_x^2 \alpha$, при $\alpha = \frac{1}{N}$. Эти соотношения показывают, что при использовании метода экспоненциального сглаживания дисперсия выходных значений будет меньше, чем при использовании метода скользящего среднего.

В статье рассмотрен частотный анализ устройства по методу экспоненциального сглаживания, определена частота среза и ограничение на параметр сглаживания.

Анализ частотных характеристик устройства по методу экспоненциального сглаживания

Применяя Z -преобразование к разностному уравнению (1), получим передаточную функцию экспоненциального сглаживания

$$H(z) = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)z^{-1}}. \quad (4)$$

Подстановка $z^{-1} = e^{-j\bar{\omega}}$, где $\bar{\omega}$ — нормированная угловая частота $\bar{\omega} = 2\pi \frac{f}{f_d}$, $\bar{\omega} \in [0, \pi]$,

f, f_d — соответственно текущая линейная частота и частота дискретизации, позволяет определить комплексную передаточную функцию

$$H(j\bar{\omega}) = \alpha \frac{[1-(1-\alpha)\cos\bar{\omega}] - j(1-\alpha)\sin\bar{\omega}}{[1-(1-\alpha)\cos\bar{\omega}]^2 + (1-\alpha)^2 \sin^2\bar{\omega}}. \quad (5)$$

Отсюда получены амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$$H(\bar{\omega}) = \frac{\alpha}{\sqrt{[1+(1-\alpha)^2] - 2(1-\alpha)\cos\bar{\omega}}}, \quad (6)$$

и фазо-частотная характеристика (ФЧХ)

$$\varphi(\bar{\omega}) = -\arctg \left(\frac{\sin\bar{\omega}}{\frac{1}{1-\alpha} - \cos\bar{\omega}} \right). \quad (7)$$

На рис. 2 приведены частотные характеристики устройства по методу скользящего среднего.

Из рис. 2 видно, что при уменьшении параметра α эффективность сглаживания возрастает, при этом полоса пропускания сужается, и частота среза стремится к нулю. Скорость спада характеристики в низкочастотной части АЧХ и ФЧХ возрастает обратно пропорционально росту параметра сглаживания α . В высокочастотной части АЧХ скорость спада уменьшается, стремясь к нулю. Медленный спад АЧХ характерен для устройств сглаживания и не очень под-

ходит для устройств, используемых в задачах фильтрации, когда требуются резкие спады АЧХ.

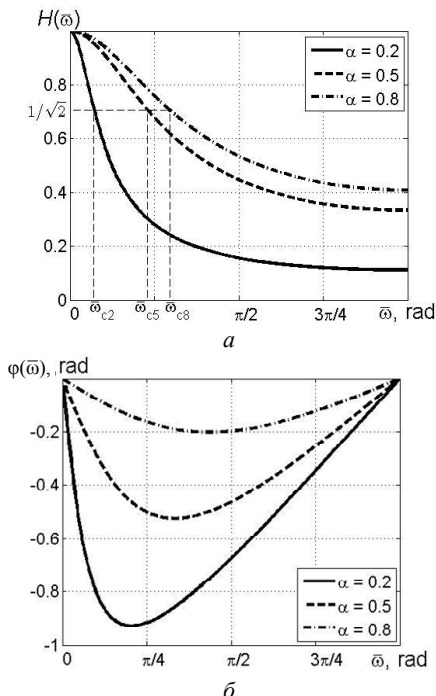


Рис. 2. Характеристики устройства по методу скользящего среднего при различных значениях: a – амплитудно-частотные; b – фазо-частотные

Фазо-частотная характеристика имеет косо-параболическую форму, а в области низких частот – близкий к линейному резкий спад, обратно пропорциональный параметру сглаживания α . В среднечастотной и высокочастотной областях ФЧХ возрастает, что приводит к фазовым искажениям выходного сигнала. Для уменьшения вклада фазовых искажений в оценку полезного сигнала необходимо, чтобы частота среза была левее частоты минимума ФЧХ.

Поскольку полезная составляющая входного сигнала системы управления, в основном, сосредоточена в низкочастотной части спектра входного сигнала, для управления характеристиками устройства по методу экспоненциального сглаживания необходимо знать частоту среза $\bar{\omega}_c$ и найти соотношение, позволяющее определить параметр сглаживания α таким, чтобы максимальная часть спектра помехи находилась вне полосы пропускания. С уменьшением параметра сглаживания α частота среза $\bar{\omega}_c$ смещается в низкочастотную часть спектра (см. рис. 3).

Частота среза $\bar{\omega}_c$ на уровне $\frac{1}{\sqrt{2}}H(0)$ определяется при решении уравнения

$$\frac{\alpha}{\sqrt{1+(1-\alpha)^2-2(1-\alpha)\cos(\bar{\omega}_c)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (7)$$

Решение этого уравнения позволяет получить результат в виде

$$\bar{\omega}_c = \arccos\left(1 - \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}\right). \quad (8)$$

Из формулы (8) следует, что

$$\left|1 - \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}\right| < 1.$$

Отсюда можно получить ограничение $\alpha < 2(\sqrt{2}-1) \approx 0,8284$. В этом случае относительная частота среза будет равна $\bar{\omega}_c = 3,1117$. При больших значениях α АЧХ будет находиться выше уровня 0,707, выбранного для определения частоты среза. Примем нижнее значение параметра сглаживания α равным 0,01 и тогда $\bar{\omega}_c = 0,0101$.

Из анализа производной ФЧХ определена относительная частота минимума ФЧХ, описанная выражением

$$\bar{\omega}_m = \arccos(1-\alpha). \quad (9)$$

На рис. 3 представлены графики зависимостей, полученных из формул (8) и (9).

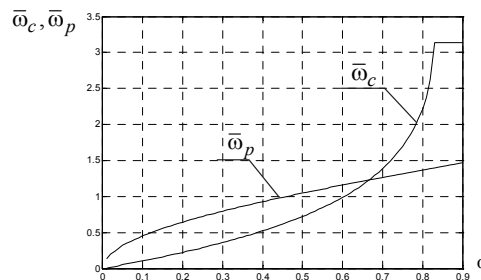


Рис. 3. Зависимость частоты среза $\bar{\omega}_c$ и частоты минимума ФЧХ $\bar{\omega}_m$ от параметра сглаживания α

Решая совместно уравнения (8) и (9), найдем разделяющее значение относительной частоты $\bar{\omega}_r$, при котором относительная частота среза $\bar{\omega}_c$ будет находиться левее, т.е. будет меньше относительной частоты минимума ФЧХ $\bar{\omega}_m$. Относительная разделяющая частота равна $\bar{\omega}_r = 1,231$

при параметре сглаживания $\alpha = 2/3$. Таким образом, вклад фазовых искажений при сглаживании будет минимальным при $\alpha \leq 2/3$ или $\alpha \leq 0,667$.

Выбор управляющих параметров сглаживания и оценка погрешности при использовании приближенных вычислений

Выбор величины параметра α определяется информацией о частоте полезного сигнала или помехи, которая есть в системе управления. Из выражения (8) можно найти зависимость параметра сглаживания α от частоты среза $\bar{\omega}_c$, т.е. той частоты, до которой желательно пропустить сигнал без искажения

$$\alpha = 2 \sin\left(\frac{\bar{\omega}_c}{2}\right) \cdot \left[\sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{\bar{\omega}_c}{2}\right)} - \sin\left(\frac{\bar{\omega}_c}{2}\right) \right]. \quad (10)$$

При разработке устройства, реализующего алгоритм экспоненциального сглаживания на микропроцессорной технике, эту зависимость можно записать в память с заданным разрешением (шагом), либо выполнить кусочно-линейную аппроксимацию, так как расчет необходимой величины параметра α , исходя из известной частоты, в соответствии с выражением (10) – сложный и длительный процесс.

Кусочно-линейная аппроксимация зависимости (10) позволяет получить систему линейных уравнений. В зависимости от требуемой точности аппроксимации число таких линейных участков варьируется. Например, как показали расчеты при заданной относительной погрешности аппроксимации $\delta \leq 0,05$, количество участков аппроксимации должно быть не меньше трех.

Система линейных уравнений, описывающая такую аппроксимацию, имеет вид

$$\begin{cases} \alpha = 0,01 + 0,9105\bar{\omega}_c; & \text{при } 0,01 \leq \bar{\omega}_c \leq 0,1748; \\ \alpha = 0,16 + 0,6772\bar{\omega}_c; & \text{при } 0,1748 \leq \bar{\omega}_c \leq 0,5587; \\ \alpha = 0,42 + 0,3642\bar{\omega}_c; & \text{при } 0,5587 \leq \bar{\omega}_c \leq 1,2452. \end{cases} \quad (11)$$

При этом аппроксимация зависимости (10) и относительная погрешность аппроксимации на ее участках показаны на рис. 4 и 5.

Заключение. Проведенный частотный анализ устройства, реализующего алгоритм экспоненциального сглаживания, позволил опреде-

лить зависимость частоты среза от параметра сглаживания, а также верхний предел параметра сглаживания, что позволяет уменьшить уровень фазовых искажений в оценке значений полезного сигнала.

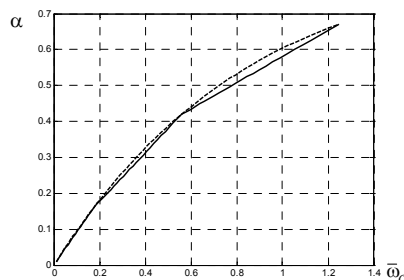


Рис. 4. Аппроксимация (1) зависимости (2) $\alpha = f(\bar{\omega}_c)$, полученной из уравнения (10)

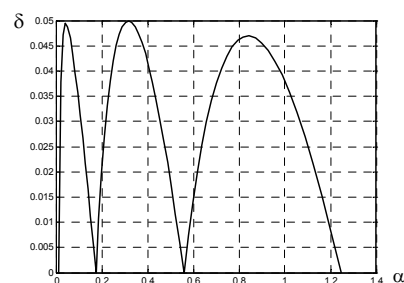


Рис. 5. Относительная погрешность аппроксимации на каждом участке

Решая задачу управления характеристиками устройства, найдена зависимость параметра сглаживания от известной частоты полезного сигнала или помехи, а также предложены варианты реализации этой зависимости при использовании микропроцессорной техники.

1. *Файзильберг Л.С.* Адаптивное сглаживание шумов в информационных технологиях обработки физиологических сигналов // Математические машины и системы – 2002. – № 3. – С. 96–104.
2. *Льонг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
3. *Брус А.А., Ситников В.С.* Линейное управление цифровым фильтром интеллектуального датчика // Тезисы доп. IV міжнар. наук.-техн. конф. «Датчики, прилади та системи – 2008» – Черкаси–Гурзуф – (вер. 2008 р.) – С. 61–62.
4. *Макс Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. – М.: Мир, 1983. – Т. 2. – 256 с.

Поступила 16.03.2011

Тел. для справок: (482) 734-8363 (Одесса)

E-mail: brus@gmail.ru, semuella@gmail.ru, sitnvs@mail.ru

© А.А. Брус, Е.В. Дикусар, В.С. Ситников,

Т.П. Яценко, 2012